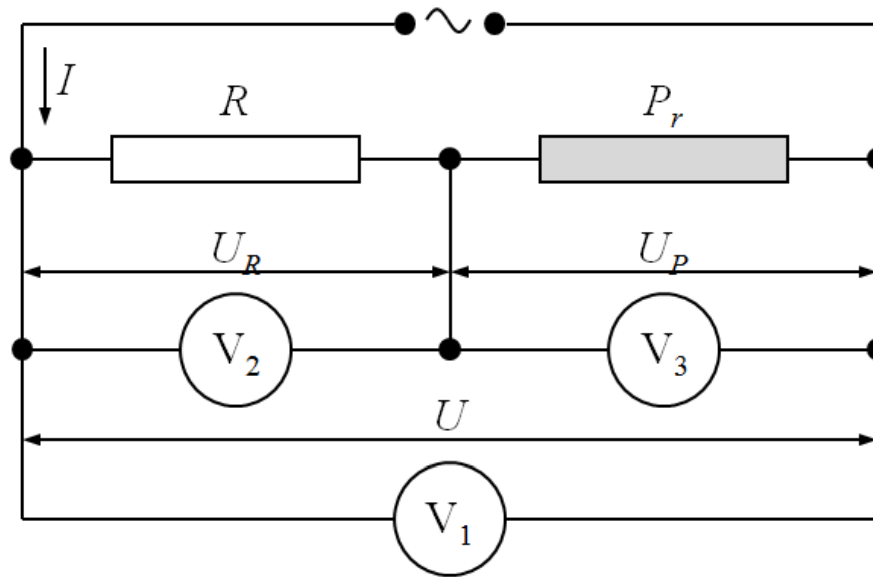


10. Merenje snage u električnim kolima II deo

10.3. Merenje snage metodom tri voltmetra

- ❖ Ovom metodom može se meriti aktivna snaga u jednofaznom kolu naizmenične struje.
- ❖ Šema veza data je na slici.



- ❖ Potrošač P_r vezan je na red sa poznatim otporom R .
- Dobro bi bilo da oba ova elementa imaju približno iste otpornosti.

10.3. Merenje snage metodom tri voltmetra

❖ Pri merenju mere se tri napona:

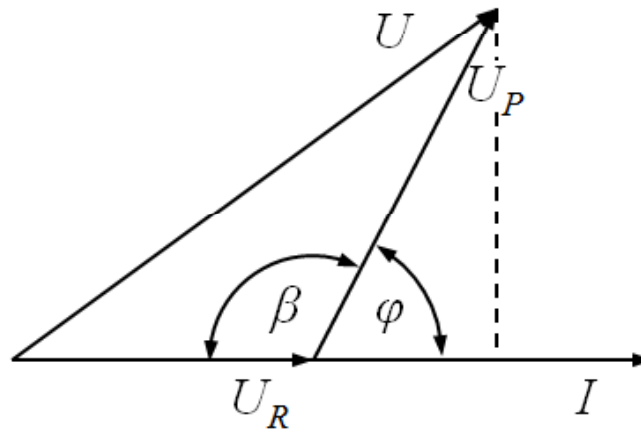
U – ukupan napon napajanja (voltmetar V1),

U_R – napon na poznatom otporu (voltmetar V2),

U_P – napon na potrošaču čija se snaga meri (voltmetar V3).

❖ Kao kod bilo kog merenja sa voltmetrima, **poželjno je** da oni imaju **što manju potrošnju**, odnosno **što veću ulaznu otpornost**.

❖ Vektorski dijagram napona za ovu šemu dat je na slici.



10.3. Merenje snage metodom tri voltmetra

- ❖ Na osnovu kosinusne teoreme važi sledeća relacija:

$$U^2 = U_R^2 + U_P^2 - 2U_R U_P \cos \beta$$

- ❖ Pošto je $\beta = \pi - \varphi$, dalje se dobija:

$$U^2 = U_R^2 + U_P^2 - 2U_R U_P \cos(\pi - \varphi)$$

$$U^2 = U_R^2 + U_P^2 + 2U_R U_P \cos \varphi \quad (*)$$

- ❖ Pošto je napon na otporniku R jednak: $U_R = R \cdot I$

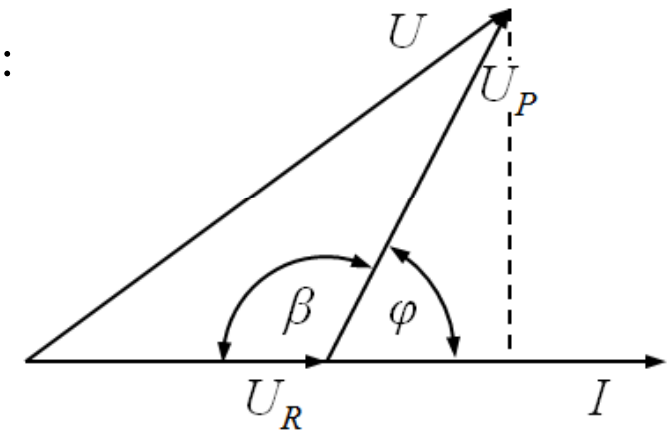
- ❖ Zamenom ovog izraza u jednačinu (*) dobija se:

$$U^2 = U_R^2 + U_P^2 + 2RIU_P \cos \varphi$$

odnosno:

$$U^2 = U_R^2 + U_P^2 + 2RP$$

gde je P aktivna snaga potrošača ($P = U_P I \cos \varphi$).



➤ Nepoznata aktivna snaga je

$$P = \frac{U^2 - U_R^2 - U_P^2}{2R}$$

10.3. Merenje snage metodom tri voltmetra

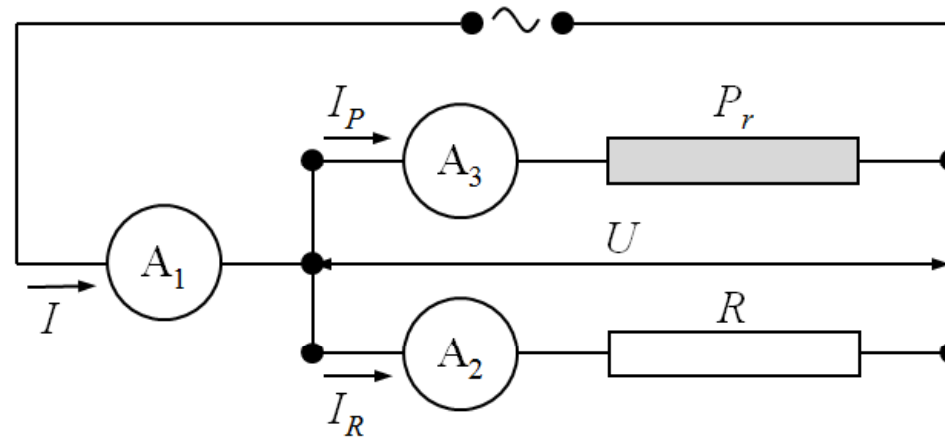
- ❖ Na osnovu poslednjeg izraza jasno je da vrednost otpora R mora biti poznata. Obično se koristi otpor etalon.
- ❖ Iz izraza (*) može se izračunati i faktor snage:

$$\cos \varphi = \frac{U^2 - U_R^2 - U_P^2}{2U_R U_P}$$

- ❖ Ova metoda ima i **sistematsku grešku** koja je **posledica potrošnje voltmetara**.
- ❖ Za preciznije merenje, moraju se uzeti u obzir potrošnje voltmetra, pri čemu se analitički može doći do tačne vrednosti aktivne snage.
- ❖ Tačnost ove metode dominantno je određena tačnošću voltmetara.
- ❖ Tačnost metode nije velika, ali je metoda vrlo praktična za primenu.
- ❖ Prednost ove metode je ta što se može koristiti samo jedan voltmetar koji može da se premešta sa elementa na element.

10.4. Merenje snage metodom tri ampermetra

- ❖ Kao i u slučaju tri voltmetra, ovom metodom može da se meri **aktivna snaga u jednofaznom kolu naizmenične struje**. Šema veza data je na slici.



- ❖ Paralelno sa potrošačem vezan je otpor etalon R . Poželjno je da ova dva elementa imaju približno iste otpornosti. Kod ove metode meri se:
- ukupna struja I (ampermetar A_1),
 - struja kroz otpornik I_R (ampermetar A_2),
 - struja kroz potrošač I_P (ampermetar A_3).

10.4. Merenje snage metodom tri ampermetra

- ❖ Vektorski dijagram struja za ovu šemu dat je na slici.
- ❖ Na osnovu kosinusne teoreme važi:

$$I^2 = I_R^2 + I_P^2 - 2I_R I_P \cos \beta$$

- ❖ Pošto je $\beta = \pi - \varphi$, dalje se dobija:

$$I^2 = I_R^2 + I_P^2 + 2I_R I_P \cos \varphi \quad (*)$$

- ❖ Iz šeme se dobija da je: $I_R = \frac{U}{R}$

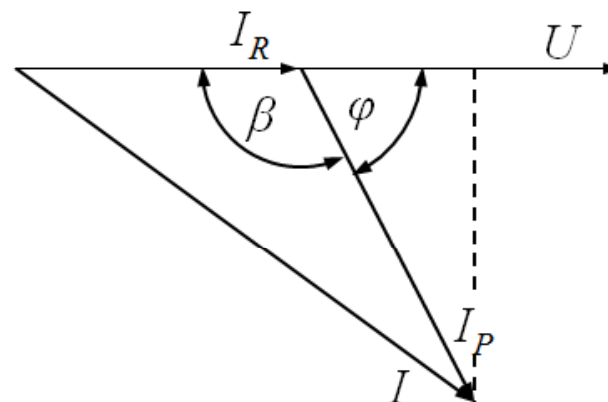
- ❖ Zamenom ovog izraza u jednačinu (*) dobija se:

$$I^2 = I_R^2 + I_P^2 + 2\frac{U}{R} I_P \cos \varphi$$

odnosno:

$$I^2 = I_R^2 + I_P^2 + 2\frac{P}{R}$$

gde je P aktivna snaga potrošača ($P = UI_P \cos \varphi$).



➤ Nepoznata aktivna snaga je:

$$P = \frac{R}{2} (I^2 - I_R^2 - I_P^2)$$

10.4. Merenje snage metodom tri ampermetra

- ❖ Iz poslednjeg izraza vidi se da vrednost otpora R mora biti poznata.
- ❖ Na osnovu relacije (*) može se izračunati i faktor snage:

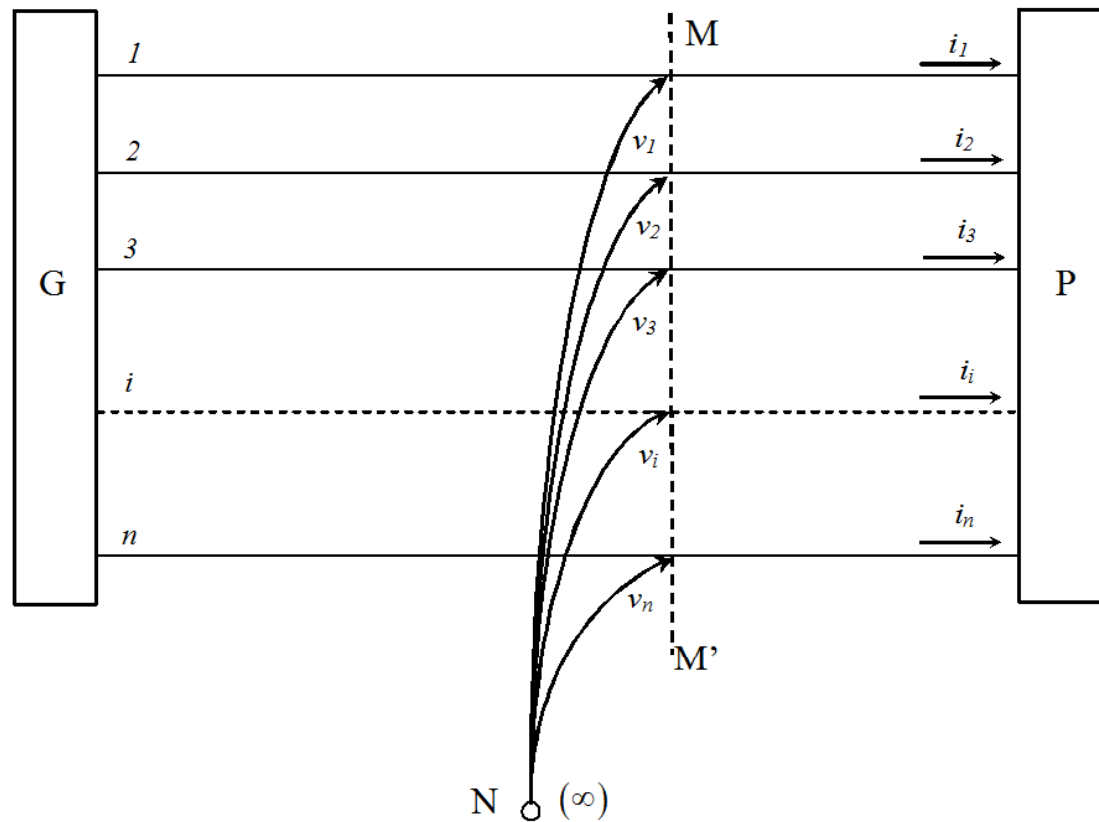
$$\cos \varphi = \frac{I^2 - I_R^2 - I_P^2}{2I_R I_P}$$

- ❖ Kao i u slučaju metode sa tri voltmetra i ova metoda je opterećena **sistematskom greškom** i to **zbog unutrašnje otpornosti ampermetara**, odnosno padova napona na njima.
- ❖ Za preciznije merenje ove vrednosti se moraju uzeti u obzir pri čemu se analitički može doći do tačne vrednosti aktivne snage.
- ❖ U svakom slučaju **pri izboru ampermetara** treba težiti da oni imaju što je moguće **manju unutrašnju otpornost**.
- ❖ Još jedan nedostatak ove metode je taj što ne može da se koristi samo jedan ampermetar jer bi šema morala da se razvezuje.
- ❖ Ovaj nedostatak se može prevazići upotrebom strujnih klešta.

10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem

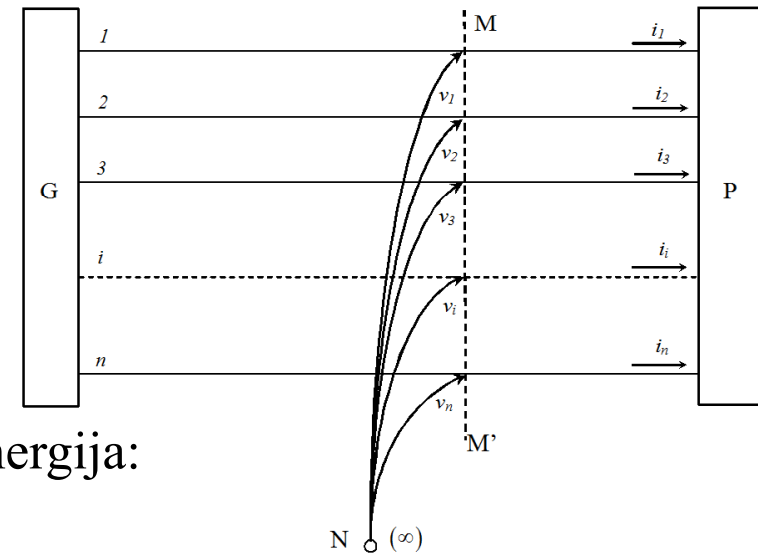
❖ Posmatra se vod sa n provodnika.



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem

❖ Posmatra se vod sa n provodnika.



❖ U periodu dt kroz presek MM' prenosi se energija:

$$dW = \sum_{k=1}^n dW_k$$

gde je dW_k energija koja se prenosi preko voda k u periodu dt .

$$dW_k = v_k i_k dt \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

gde su:

i_k - struja kroz k -ti provodnik,

v_k - potencijal k -tog provodnika u odnosu na tačku N

10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem

- ❖ Ukupna energija koja se prenosi preko svih provodnika tada je:

$$dW = \sum_{k=1}^n v_k i_k dt$$

- ❖ Trenutna snaga koja se prenosi kroz presek MM':

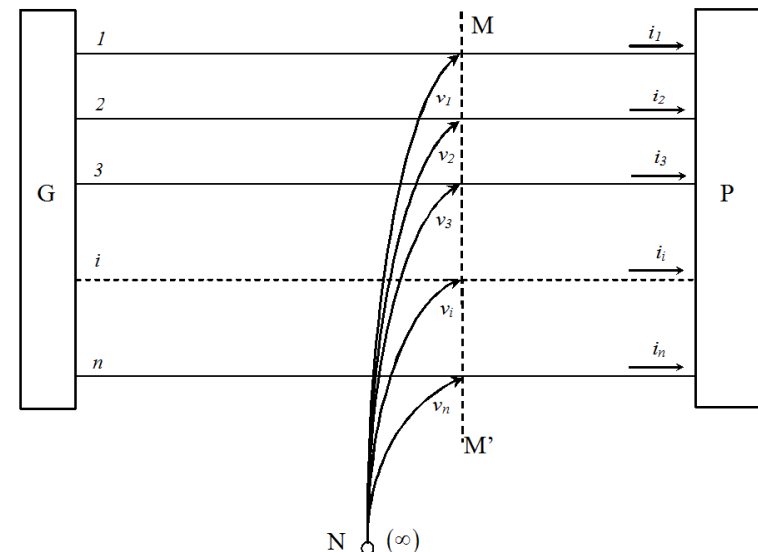
$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_{k=1}^n v_k i_k$$

- ❖ Pošto je snaga koja se prenosi preko k-tog provodnika:

$$P_k = \frac{dW_k}{dt} = v_k i_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

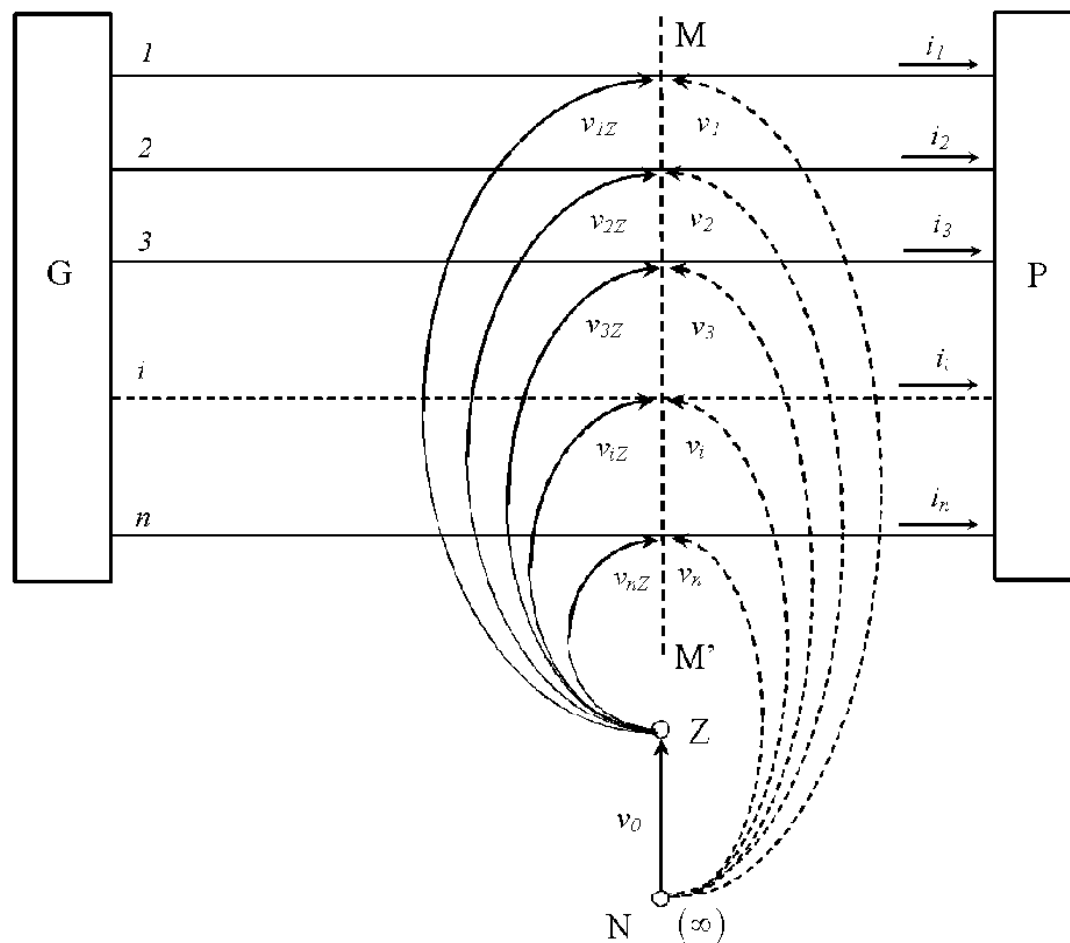
tada se ukupna snaga može dati kao:

$$P = \sum_{k=1}^n v_k i_k = \sum_{k=1}^n P_k$$



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem

❖ Tada je po definiciji:

$$v_k = v_{kZ} + v_0$$

gde su:

v_{kZ} - potencijal k-tog provodnika u odnosu na tačku Z,

v_0 - potencijal tačke Z u odnosu na referentnu tačku N koja je u beskonačnosti.

❖ Sada se snaga koja se prenosi vodom može dati u obliku:

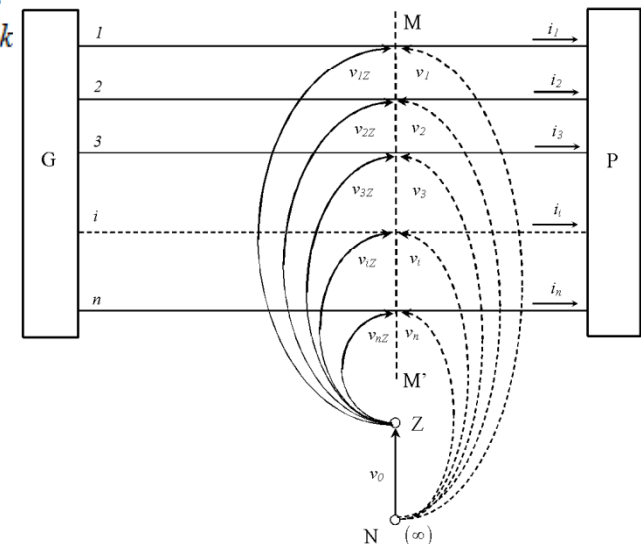
$$p = \sum_{k=1}^n v_k i_k = \sum_{k=1}^n (v_{kZ} + v_0) \cdot i_k = \sum_{k=1}^n v_{kZ} \cdot i_k + v_0 \cdot \sum_{k=1}^n i_k$$

➤ Pošto po I Kirchoffovom zakonu važi da je:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

dobija se:

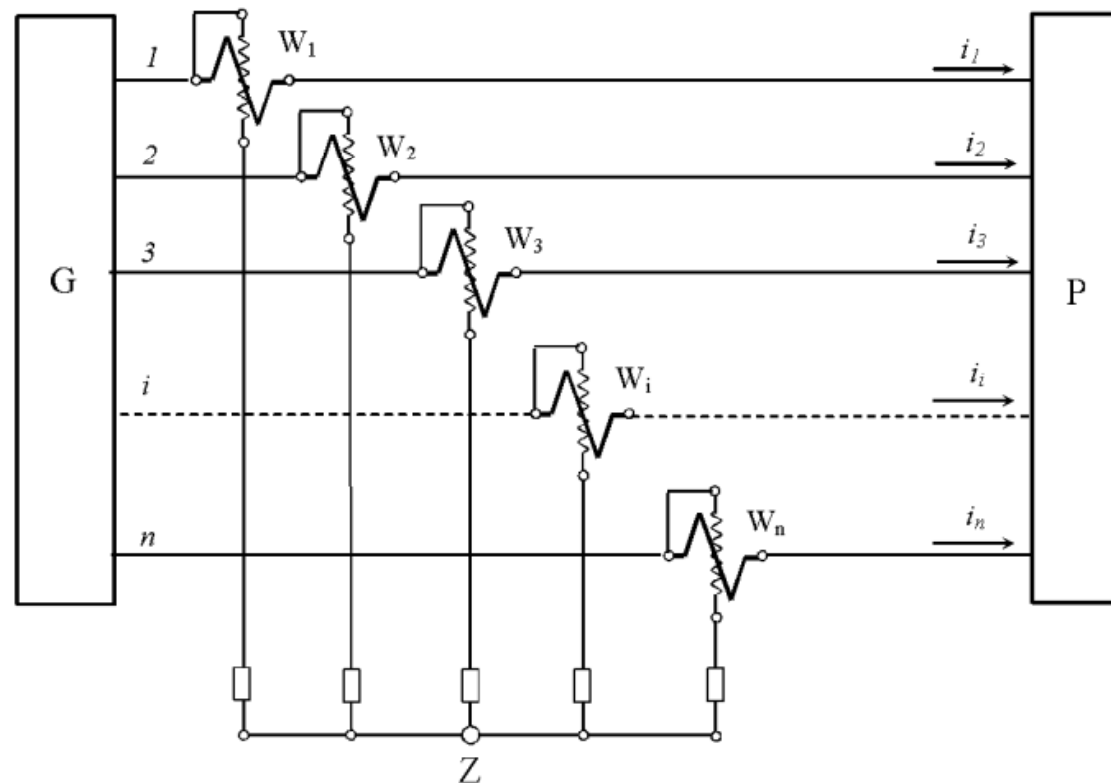
$$p = \sum_{k=1}^n v_{kZ} \cdot i_k$$



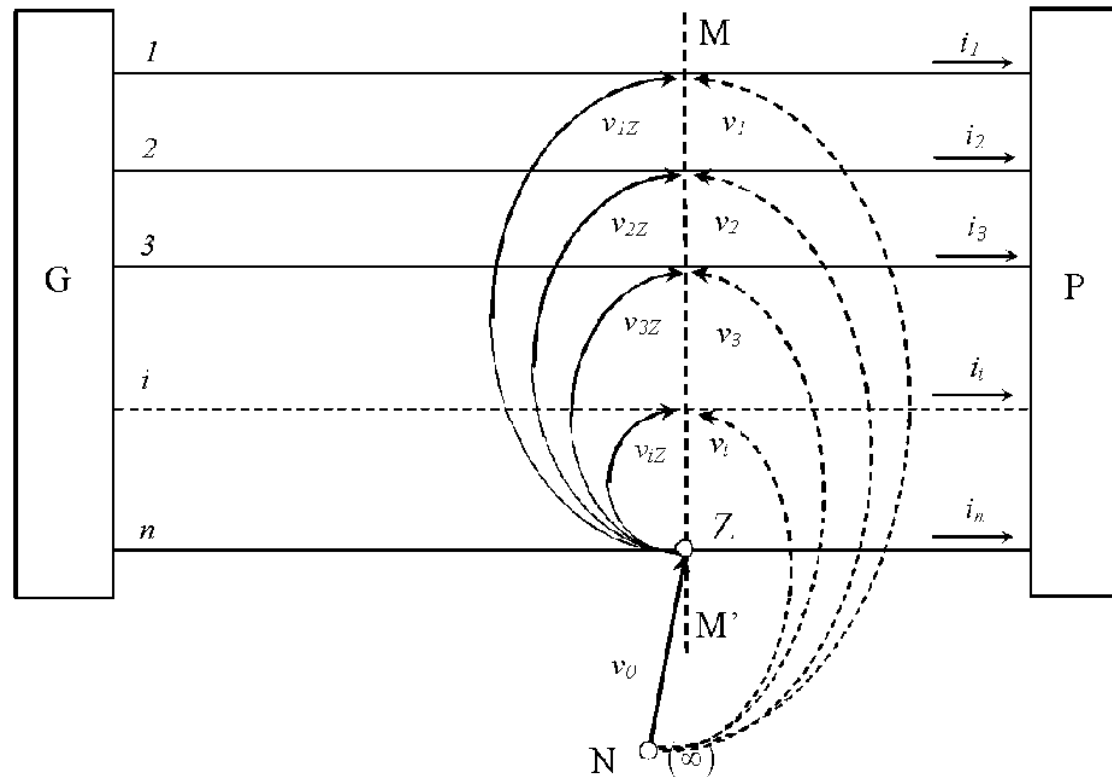
10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem

- ❖ Snaga se može meriti tako da se meri pojedinačna snaga u svakom provodniku.



- ❖ U n-žičnom sistemu snaga se može meriti sa n vatmetara i ukupna snaga je zbir pokazivanja vatmetara.



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem

- ❖ Sada su potencijali:

$$v_k = v_{kZ} + v_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

pri čemu je za fazu n:

$$v_n = v_{nZ} + v_0.$$

- ❖ Ovde je sada (slika):

$$v_n = v_0$$

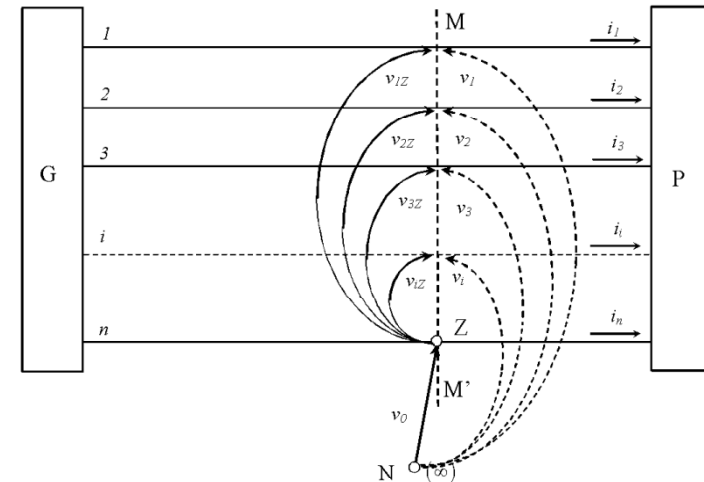
tako da se dobija:

$$v_{nZ} = v_n - v_0 = v_0 - v_0 = 0$$

- ❖ Snaga koja se prenosi preko svih provodnika sada je:

$$p = \sum_{k=1}^{n-1} v_{kZ} \cdot i_k$$

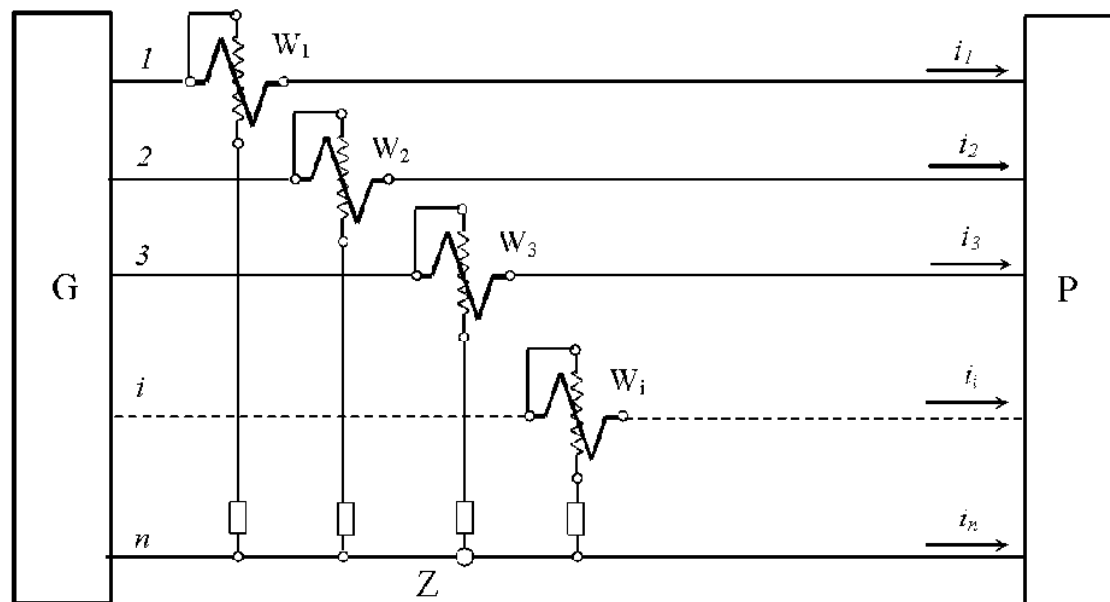
pošto je za $k=n \rightarrow v_{nZ}=0$.



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.1. n- žični sistem

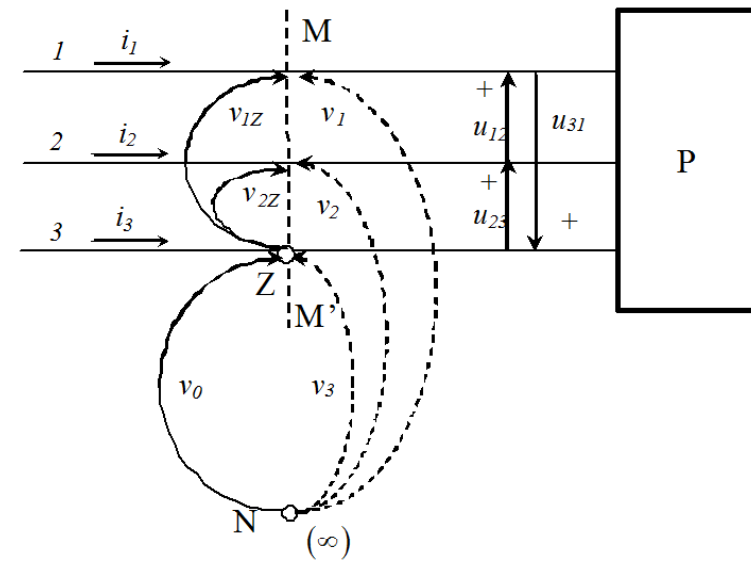
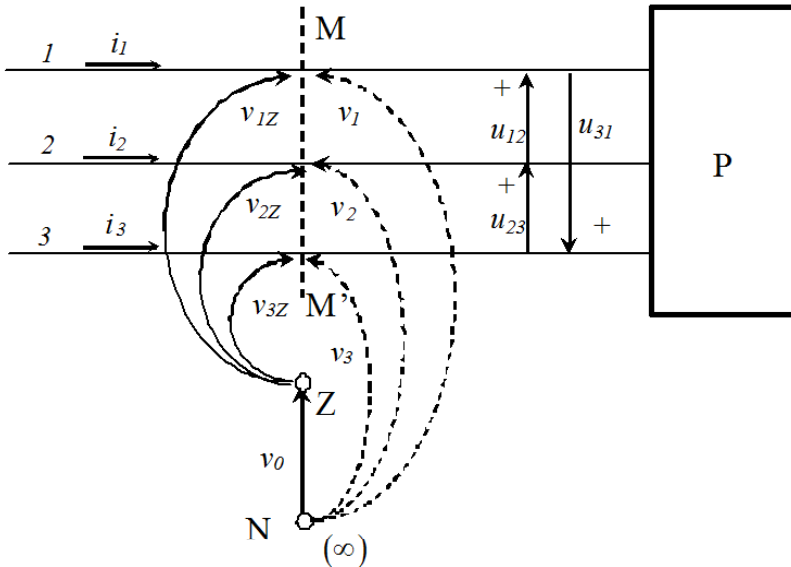
- ❖ To znači da se u tom slučaju ukupna snaga može izmeriti sa $(n-1)$ vatmetrom, prema slici:



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.2. Trofazni trožični sistem

- ❖ Sva tri provodnika su aktivna, potrošač se vezuje između dva provodnika, dve faze, na međufazni napon.
- ❖ Primenjuje se:
 - na visokim i srednjim naponima (10 - 400)kV
 - za napajanje simetričnih potrošača na distributivnim naponima (0,4kV)



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.2. Trofazni trožični sistem

❖ Za ovaj sistem se definišu:

- fazni naponi, jednaki potencijalima provodnika prema referentnoj tački koja je izvan provodnika. Tada je:

$$u_k = v_{kZ} \quad , \quad k = 1, 2, 3$$

$$u_1 = v_{1Z} \quad , \quad u_2 = v_{2Z} \quad , \quad u_3 = v_{3Z}$$

- međufazni (linijski) naponi jednaki razlici potencijala između provodnika, što se svodi na to da su oni jednaki razlici faznih napona.

$$u_{ij} = v_{iZ} - v_{jZ} = u_i - u_j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j$$

što se može dati kao:

$$u_{12} = v_{1Z} - v_{2Z} = u_1 - u_2$$

$$u_{23} = v_{2Z} - v_{3Z} = u_2 - u_3$$

$$u_{31} = v_{3Z} - v_{1Z} = u_3 - u_1$$

10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

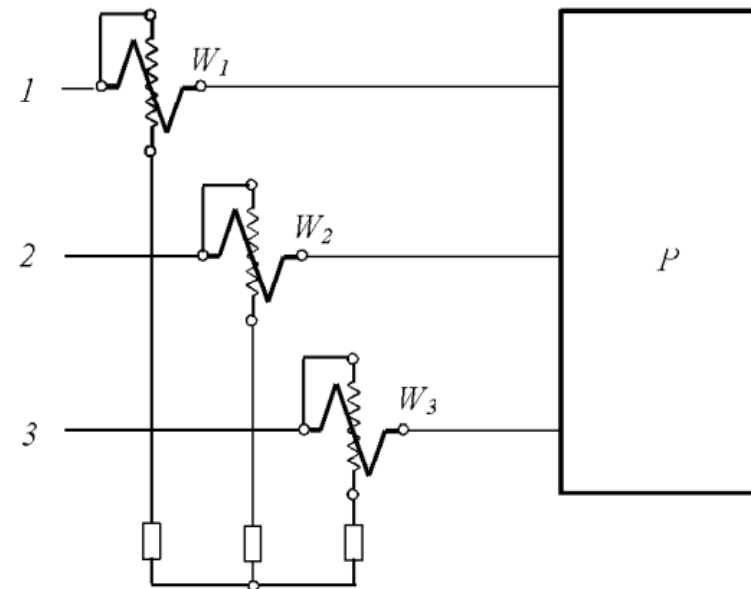
10.5.1.2. Trofazni trožični sistem

❖ Snage se sada mogu dati izrazima:

- preko faznih napona

$$P = \sum_{k=1}^3 v_{kZ} \cdot i_k = \sum_{k=1}^3 u_k \cdot i_k$$

- Referentna tačka izvan voda.
- Može se meriti sa tri vatmetra.



10.5.1. Merenje snage u višefaznim sistemima - Uvod

10.5.1.2. Trofazni trožični sistem

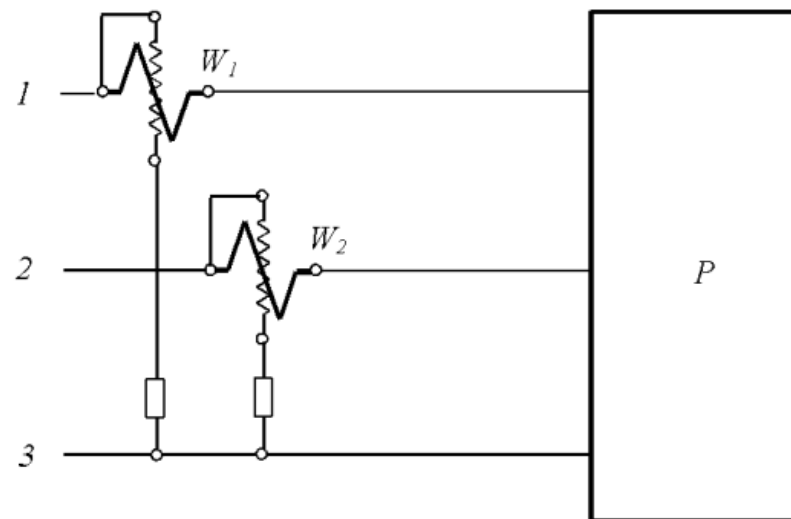
- preko međufaznih napona

- Referentna tačka na provodniku broj 3.

$$p = \sum_{k=1}^3 v_{kZ} \cdot i_k = v_{13} \cdot i_1 + v_{23} \cdot i_2 + v_{33} \cdot i_3$$

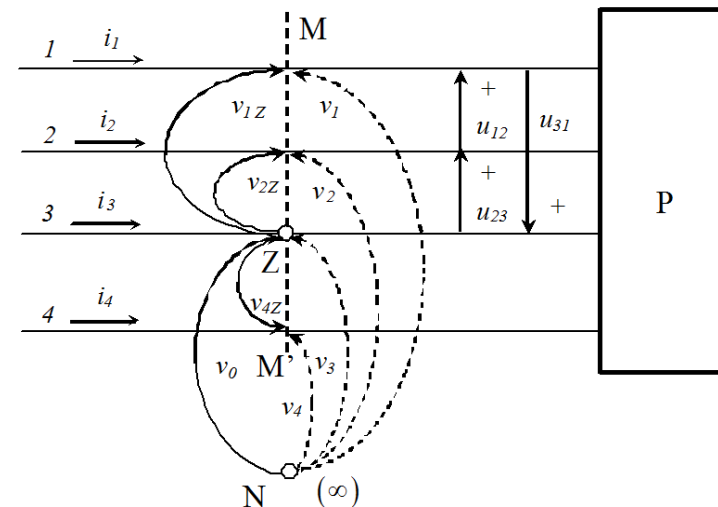
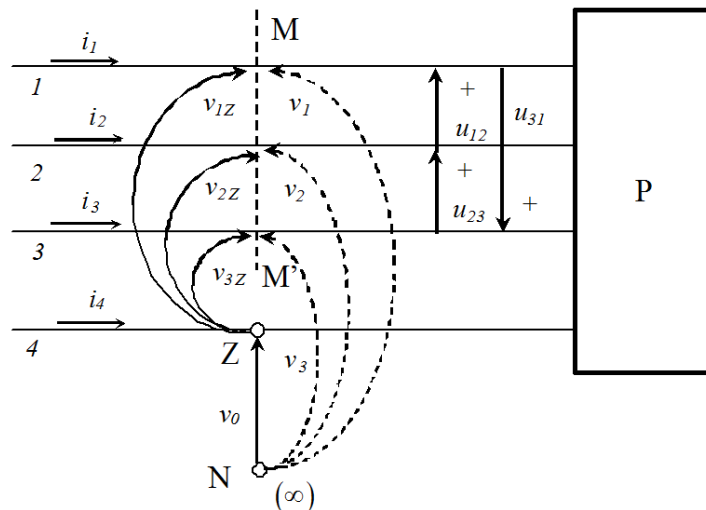
$$p = u_{13} \cdot i_1 + u_{23} \cdot i_2$$

- Snaga se može meriti sa samo dva vatmetra.



10.5.1.3. Trofazni četvorožični sistem

- ❖ Napajanje potrošača na distributivnom naponskom nivou (0.4kV).
- ❖ U sistemu postoje:
 - tri aktivna provodnika (1,2,3),
 - jedan neutralni provodnik, nije aktivan.
- ❖ Potrošači se mogu priključiti:
 - između dva aktivna provodnika ("međufazno") na međufazni napon,
 - između bilo kog aktivnog provodnika ("faze") i neutralnog provodnika na fazni napon.
- ❖ Za ovaj sistem je **referentna tačka Z vezana za neutralni provodnik**.
- ❖ Važe potpuno iste definicije faznih i međufaznih napona kao kod trožičnog sistema.



10.5.1.3. Trofazni četvorožični sistem

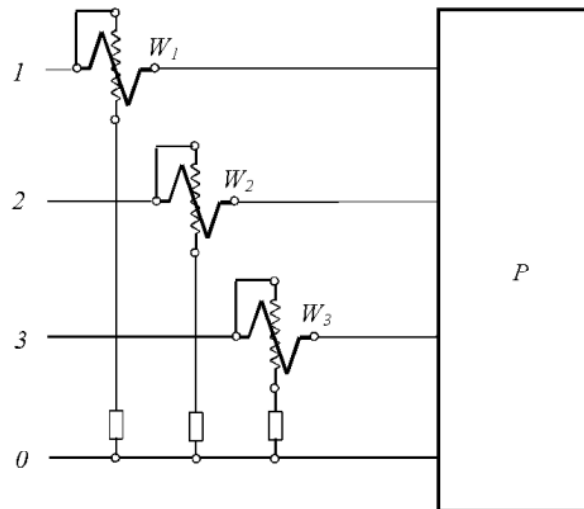
❖ Snage se daju izrazima:

- preko faznih napona

$$p = \sum_{k=1}^3 v_{kZ} \cdot i_k = \sum_{k=1}^3 u_k \cdot i_k$$

➤ Referentna tačka Z vezana je za neutralni provodnik, ‘’nulu’’.

❖ Snaga se meri sa tri vatmetra.



10.5.1.3. Trofazni četvorožični sistem

- preko međufaznih napona

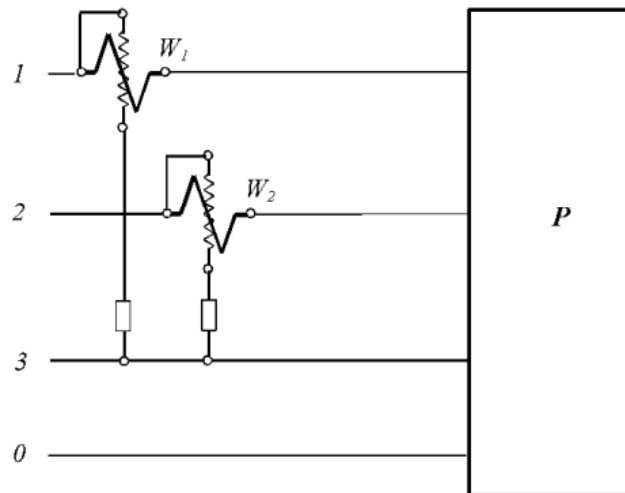
- Referentna tačka je na aktivnom provodniku, "fazi", broj 3.

Tada je:

$$p = \sum_{k=1}^3 v_{kZ} \cdot i_k = v_{13} \cdot i_1 + v_{23} \cdot i_2 + v_{33} \cdot i_3$$

$$p = u_{13} \cdot i_1 + u_{23} \cdot i_2$$

- Moguće je meriti snagu sa samo dva vatmetra.



- ❖ Ovo merenje je moguće samo u slučaju kada je ispunjen uslov:

$$\sum_{k=1}^3 i_k = 0 \Rightarrow i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

10.5.2 Merenje snage u trofaznim sistemima

- ❖ Trofazni sistem napajanja može da se realizuje u dve varijante.
- ❖ Prva varijanta je trofazni trožični sistem.
- ❖ Druga varijanta je trofazni četvorožični sistem.
- ❖ Tri faze se označavaju slovima R, S i T, dok se neutralni provodnik označava brojem 0.
- ❖ Iz praktičnih razloga, faze su označene brojevima 1, 2 i 3.
- ❖ U trofaznim kolima mogu se definisati fazni i međufazni naponi.
- ❖ Fazni naponi su naponi između faznih provodnika i neutralnog (nultog) provodnika.
- ❖ Međufazni naponi su naponi između dve faze.

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

- ❖ Za trofazna kola sa prostoperiodičnom (sinusoidnom) eksitacijom fazni i međufazni naponi mogu se opisati izrazima:

$$u_i(t) = \sqrt{2}U_i \sin(\omega t + \psi_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$u_{ij}(t) = u_i(t) - u_j(t) = \sqrt{2}U_{ij} \sin(\omega t + \theta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j$$

gde su:

U_i - efektivne vrednosti faznih napona,

ψ_i - početne faze faznih napona,

U_{ij} - efektivne vrednosti međufaznih napona i

θ_{ij} - početne faze međufaznih napona.

10.5.2 Merenje snage u trofaznim sistemima

❖ Struje u fazama su:

$$i_i(t) = \sqrt{2}I_i \sin(\omega t + \xi_i), \quad i = 1, 2, 3$$

gde su:

I_i - efektivne vrednosti struja u fazama i

ξ_i - početne faze faznih struja.

❖ **Trenutna snaga** trofaznog sistema može se izraziti preko faznih veličina napona i struja:

$$p(t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t) i_i(t)$$

❖ Na osnovu prethodne formule može se odrediti **aktivna snaga**:

$$P = \sum_{i=1}^3 U_i I_i \cos(\psi_i - \xi_i)$$

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

❖ Ako se uvede ugao faznog pomeraja φ_i između faznog napona i fazne struje za aktivnu snagu se dobija:

$$P = \sum_{i=1}^3 U_i I_i \cos \varphi_i$$

❖ Ako je prividna snaga:

$$S = \sum_{i=1}^3 U_i I_i$$

onda je reaktivna snaga:

$$Q = \sum_{i=1}^3 U_i I_i \sin \varphi_i$$

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

- ❖ Trofazni sistem može biti **uravnotežen** ili **neuravnotežen**.
- ❖ Na to da li će sistem biti uravnotežen ili ne utiču kako strana napajanja tako i strana potrošnje.
- ❖ Da bi sistem bio uravnotežen moraju biti ispunjeni odgovarajući uslovi.
- ❖ Efektivne vrednosti napona sve tri faze moraju biti jednake:

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_f$$

- ❖ Fazori napona moraju biti međusobno fazno pomereni za ugao $2\pi/3$, odnosno:

$$\psi_1 = \psi,$$

$$\psi_2 = \psi - \frac{2\pi}{3},$$

$$\psi_3 = \psi - \frac{4\pi}{3}.$$

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

- ❖ Takođe, struje u svim fazama moraju biti jednake:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

- ❖ Fazori struja moraju biti međusobno fazno pomereni za ugao $2\pi/3$, odnosno:

$$\xi_1 = \xi,$$

$$\xi_2 = \xi - \frac{2\pi}{3},$$

$$\xi_3 = \xi - \frac{4\pi}{3}.$$

- ❖ Posledice navedenih uslova je da su međufazni naponi jednaki, odnosno:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31}$$

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

- ❖ Zatim, fazori međufaznih napona su međusobno fazno pomereni za ugao $2\pi/3$:

$$\begin{aligned}\theta_{12} &= \theta, \\ \theta_{23} &= \theta - \frac{2\pi}{3}, \\ \theta_{31} &= \theta - \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

- ❖ Konačno, fazni pomeraji između faznih napona i struja su jednaki:

$$\begin{aligned}\psi_1 - \xi_1 &= \psi - \xi = \varphi, \\ \psi_2 - \xi_2 &= \psi - \frac{2\pi}{3} - \left(\xi - \frac{2\pi}{3} \right) = \psi - \xi = \varphi, \\ \psi_3 - \xi_3 &= \psi - \frac{4\pi}{3} - \left(\xi - \frac{4\pi}{3} \right) = \psi - \xi = \varphi,\end{aligned}$$

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

❖ Može se izvesti izraz za međufazni napon za slučaj kada je sistem uravnotežen.

❖ Pošto je:

$$u_{12}(t) = u_1(t) - u_2(t) = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \psi_1) - \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

$$U_1 = U_2 = U_f$$

$$\psi_1 = \psi,$$

$$\psi_2 = \psi - \frac{2\pi}{3},$$

dobija se:

$$u_{12}(t) = u_1(t) - u_2(t) = \sqrt{2}U_f \left[\sin(\omega t + \psi) - \sin\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

❖ Pošto iz trigonometrije važi formula:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

dobija se da je:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \psi) - \sin\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right) &= 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t + \psi - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

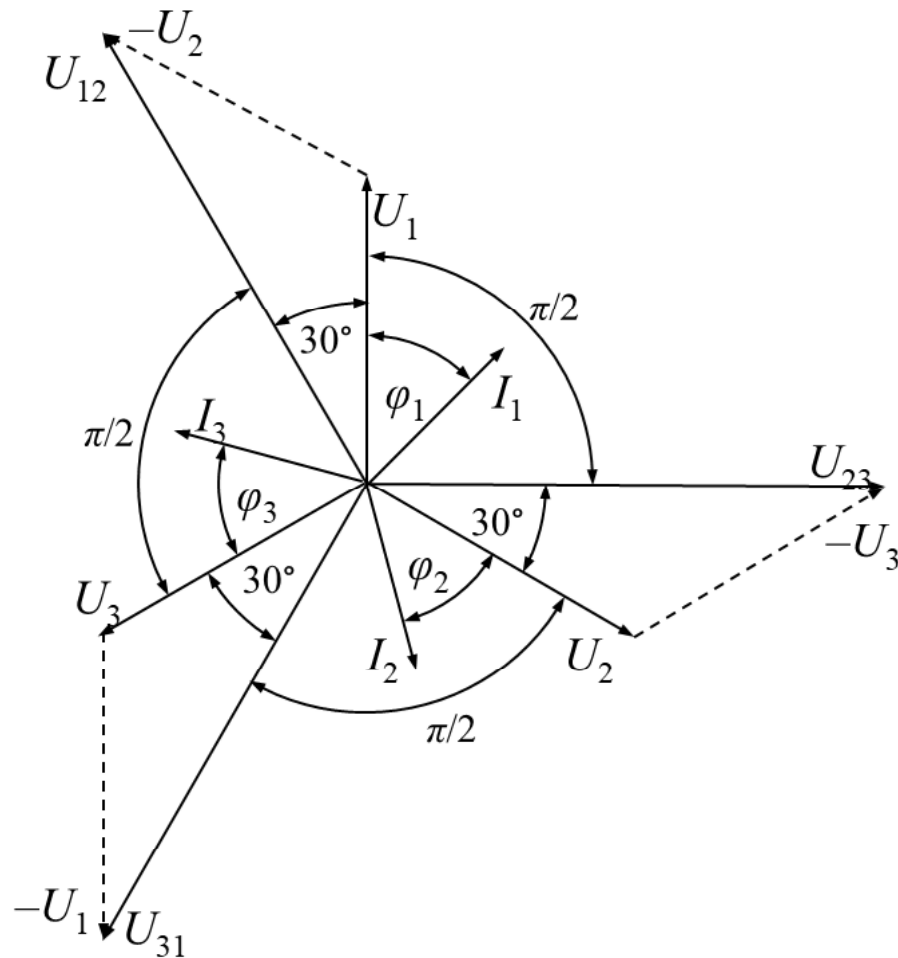
❖ Za međufazni napon dobija se izraz:

$$u_{12}(t) = \sqrt{3} \sqrt{2} U_f \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{6}\right)$$

❖ Na osnovu poslednjeg izraza može se reći da je **efektivna vrednost međufaznog napona za $\sqrt{3}$ puta veća od efektivne vrednosti faznog napona.**

❖ Naravno, ovaj odnos važi i za maksimalne vrednosti.

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima



- ❖ Međufazni napon U_{ij} prednjači faznom naponu U_i za ugao $\pi/6$ (30°).
- ❖ Može se i primetiti da je ugao između odgovarajućih međufaznih i faznih napona 90° .
- To važi za parove napona:
 U_1-U_{23} , U_2-U_{31} i U_3-U_{12} .
- ❖ Svi ovi odnosi mogu se videti na vektorskom dijagramu uravnoteženog sistema datom na slici.

10.5.2. Merenje snage u trofaznim sistemima

- ❖ Važna veličina u elektroenergetskim mrežama je **faktor snage**.
- ❖ On se definiše kao **odnos aktivne i prividne snage**, odnosno:

$$k = \frac{P}{S}$$

- ❖ Za pojedinačni potrošač, faktor snage odgovara kosinusu ugla faznog pomeraja φ samog potrošača:

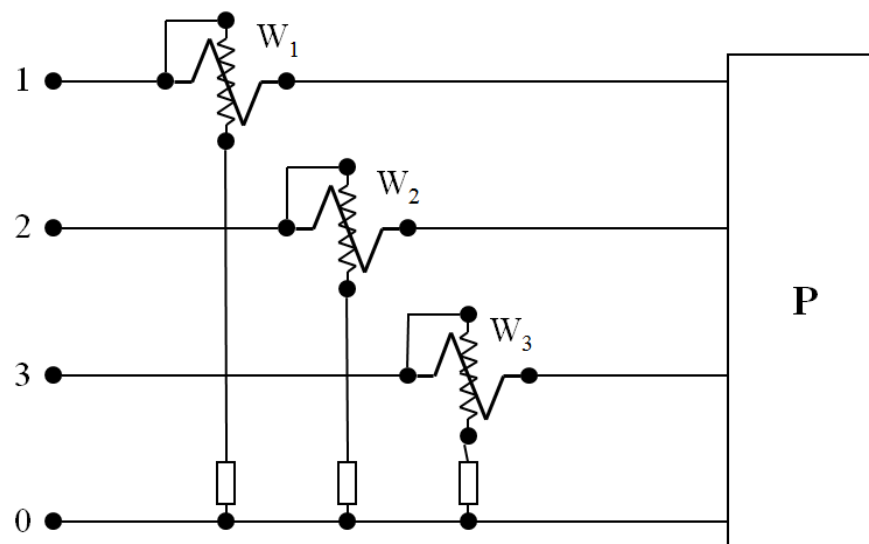
$$k = \frac{P}{S} = \frac{U_p I_p \cos \varphi}{U_p I_p} = \cos \varphi$$

- ❖ Ako se meri napon, struja i snaga **grupe potrošača** onda je dobijeni faktor snage **ekvivalentna vrednost faktora za celu grupu potrošača**, pa je i dobijeni **ugao faznog pomeraja** ekvivalentna vrednost za celu grupu potrošača.

10.5.2.1. Šeme za merenje aktivne snage u trofaznim sistemima

10.5.2.1.1. Merenje aktivne snage pomoću tri vatmetra

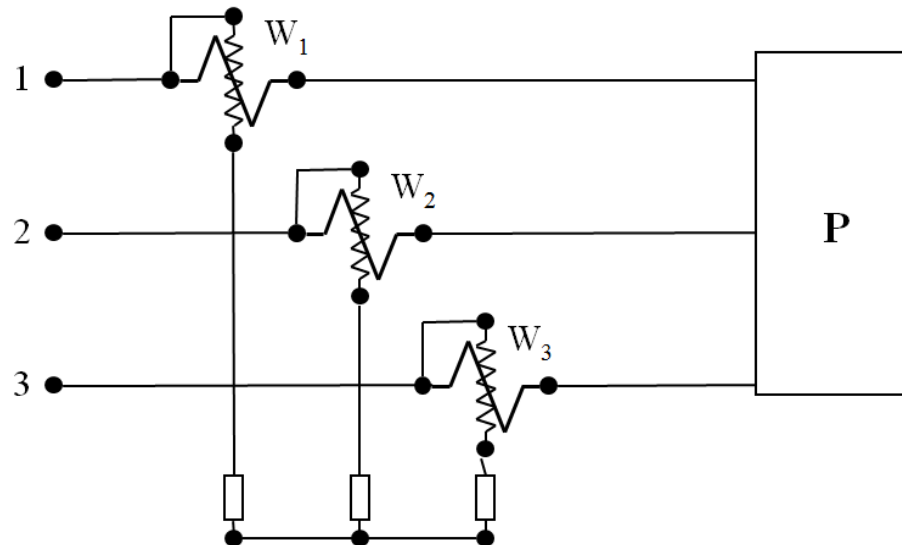
- Šeme za merenje aktivne snage zavise od toga da li je sistem trožični ili četvortožični.
- Zavise i od toga da li je sistem uravnotežen ili ne.
- ❖ U četvorožičnom neuravnoteženom sistemu potrebna su tri vatmetra da bi se izmerila aktivna snaga.



- ❖ Kao što se vidi sa slike **strujni namotaji** vatmetra vezuju se **redno** tako da kroz njih protiče fazna struja.
- ❖ **Naponski namotaji** vezuju se **na fazne napone**.

10.5.2.1.1. Merenje aktivne snage pomoću tri vatmetra

- Za merenje aktivne snage u trofaznom trožičnom sistemu pomoću tri vatmetra šema je slična prethodnoj šemi.



- Glavna razlika je ta što se u ovakvom sistemu mora formirati **veštačka nula**, odnosno **veštačko zvezdište** jer u takvom sistemu ne postoji neutralni provodnik.
- Izlazni krajevi naponskih namotaja se povezuju u zajedničku tačku i tako formiraju veštačku nulu.

10.5.2.1.1. Merenje aktivne snage pomoću tri vatmetra

- ❖ Pokazivanja vatmetara su (i u trožičnom i u četvorožičnom sistemu):

$$P_{W1} = U_1 I_1 \cos \varphi_1 \qquad \angle(\underline{U}_1, \underline{I}_1) = \varphi_1$$

$$P_{W2} = U_2 I_2 \cos \varphi_2 \qquad \angle(\underline{U}_2, \underline{I}_2) = \varphi_2$$

$$P_{W3} = U_3 I_3 \cos \varphi_3 \qquad \angle(\underline{U}_3, \underline{I}_3) = \varphi_3$$

- ❖ Ukupna aktivna snaga koju mere vatmetri je:

$$P = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}$$

- ❖ Ova snaga je upravo **snaga sistema, odnosno potrošača čija se snaga meri.**

- ❖ Za uravnoteženi sistem važi da je:

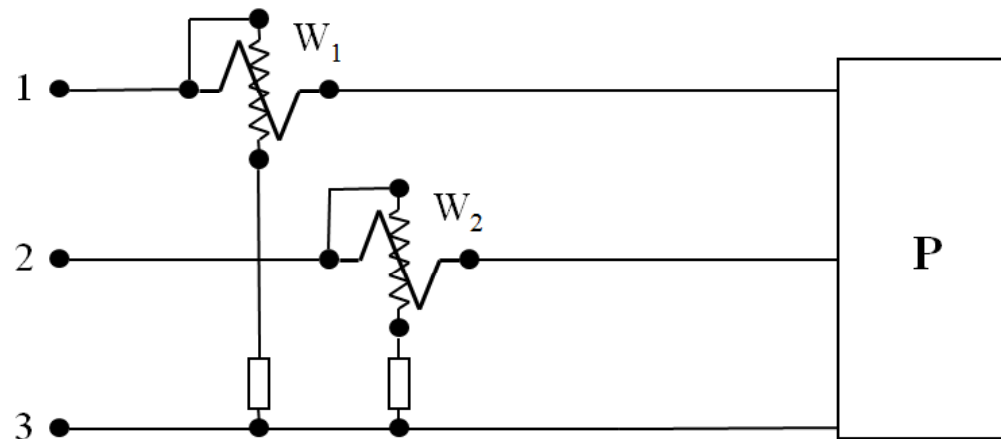
$$P_{W1} = P_{W2} = P_{W3} = P_W$$

pa se dobija da je ukupna snaga jednaka $P=3P_W$.

- ❖ Tako da je snagu **u uravnoteženom sistemu moguće meriti samo sa jednim vatmetrom.**

10.5.2.1.2. Merenje aktivne snage primenom Aronove sprege

- ❖ U trofaznom trožičnom sistemu aktivna snaga se može meriti i pomoću dva vatmetra.
- ❖ Takva šema naziva se Aronova sprega i data je na slici.



- ❖ Kod ove šeme **strujni namotaji** vatmetara vezuju se **redno** tako da kroz njih protiču fazne struje.
- ❖ **Naponski namotaji** se vezuju **na međufazne napone**.

10.5.2.1.2. Merenje aktivne snage primenom Aronove sprege

❖ Skretanja vatmetara su :

$$P_{W1} = U_{13} I_1 \cos \angle(\underline{U}_{13}, \underline{I}_1)$$

$$P_{W2} = U_{23} I_2 \cos \angle(\underline{U}_{23}, \underline{I}_2)$$

❖ Bez obzira da li je sistem uravnotežen ili ne, ukupna aktivna snaga sistema je:

$$P = P_{W1} + P_{W2}$$

- ❖ Zavisno od karaktera opterećenja, može se desiti da skretanje nekog od dva vatmetra bude negativno.
- ❖ U svakom slučaju ukupna snaga se dobija kao algebarski zbir pokazivanja dva vatmetra.

10.5.2.1.2. Merenje aktivne snage primenom Aronove sprege

❖ Aronovu spregu najlakše je objasniti na uravnoteženom sistemu. Tada je:

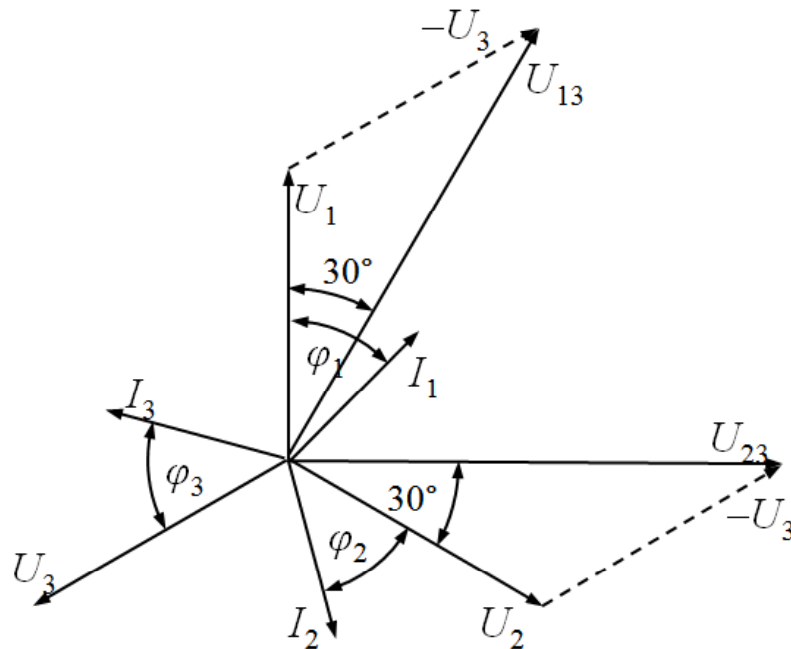
$$U_{13} = U_{23} = U_l$$

$$I_1 = I_2 = I$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

gde je U_l linijski napon ($U_l = \sqrt{3}U_f$).

❖ Vektorski dijagram za Aronovu spregu prikazan je na slici.



➤ Sa vektorskog dijagrama za Aronovu spregu se vidi da je:

$$\angle(U_{13}, I_1) = \varphi - 30^\circ$$

$$\angle(U_{23}, I_2) = \varphi + 30^\circ$$

10.5.2.1.2. Merenje aktivne snage primenom Aronove sprege

❖ Zbir pokazivanja dva vatmetra je:

$$P = P_{W1} + P_{W2} = U_l I \cos(\varphi - 30^\circ) + U_l I \cos(\varphi + 30^\circ)$$

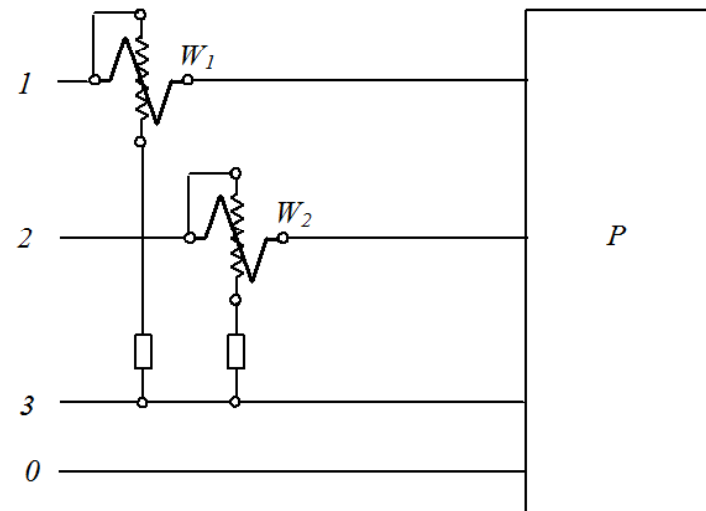
$$P = U_l I (\cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \sin 30^\circ + \cos \varphi \cos 30^\circ - \sin \varphi \sin 30^\circ)$$

$$P = U_l I \cdot 2 \cos \varphi \cos 30^\circ = U_l I \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi$$

$$P = \sqrt{3} U_l I \cos \varphi = 3 U_f I \cos \varphi$$

❖ Iz poslednjeg izraza vidi se da je zbir pokazivanja dva vatmetra jednak ukupnoj aktivnoj snazi sistema.

❖ Potrebno je reći da **Aronova sprega** može da se koristi i u **četrovožičnom** sistemu ali samo pod uslovom da je **sistem uravnotežen**.



10.5.2.1.2. Merenje aktivne snage primenom Aronove sprege

❖ Za induktivni potrošač: $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, $\varphi > 0^\circ$

$$P_{W1} = U_{13} I_1 \cos \angle(\underline{U}_{13}, \underline{I}_1)$$

$0^\circ < \varphi < 60^\circ$ P_{w1}, P_{w2} - pozitivno

$$P_{W2} = U_{23} I_2 \cos \angle(\underline{U}_{23}, \underline{I}_2)$$

$\varphi = 60^\circ$ P_{w1} - pozitivno, $P_{w2} = 0$

$$\angle(\underline{U}_{13}, \underline{I}_1) = \varphi - 30^\circ$$

$\varphi > 60^\circ$ P_{w1} - pozitivno, $P_{w2} < 0$

$$\angle(\underline{U}_{23}, \underline{I}_2) = \varphi + 30^\circ$$

❖ Za kapacitivni potrošač: $0^\circ < |\varphi| < 90^\circ$, $\varphi < 0^\circ$

$0^\circ < |\varphi| < 60^\circ$ P_{w1}, P_{w2} - pozitivno

$|\varphi| = 60^\circ$ $P_{w1} = 0$, P_{w2} - pozitivno,

$|\varphi| > 60^\circ$ $P_{w1} < 0$, P_{w2} - pozitivno.

10.5.2.2. Šeme za merenje reaktivne snage u trofaznim sistemima

❖ Za prostoperiodičnu eksitaciju, reaktivna snaga potrošača se definiše kao:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

gde su:

S - prividna snaga potrošača,

P - aktivna snaga potrošača.

❖ Pošto je:

- prividna snaga $S = UI$

- aktivna snaga $P = UI \cos \varphi$

➤ Dobija se za reaktivnu snagu:

$$Q = UI \sin \varphi$$

gde je φ fazni ugao potrošača.

10.5.2.2. Šeme za merenje reaktivne snage u trofaznim sistemima

❖ Za trofazni sistem se može dati da je za svaku fazu:

$$Q_i = \sqrt{S_i^2 - P_i^2} = U_i I_i \sin \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3$$

gde su U_i fazni naponi.

❖ Tada je za trofazni sistem:

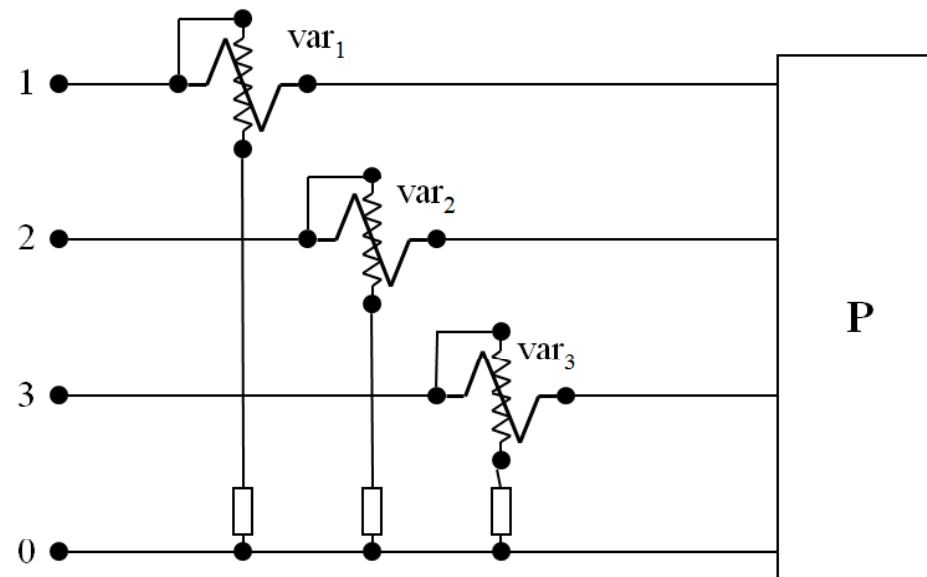
$$Q = \sum_{i=1}^3 Q_i$$

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3$$

10.5.2.2. Šeme za merenje reaktivne snage u trofaznim sistemima

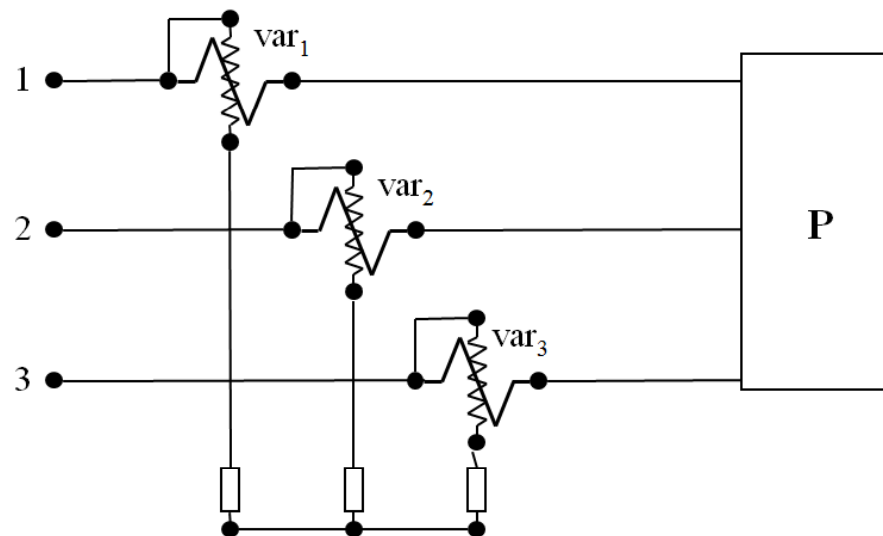
10.5.2.2.1. Merenje reaktivne snage pomoću tri varmetra

- ❖ Reaktivna snaga trofaznog sistema može se meriti primenom varmetara, ali i primenom posebnih veza vatmetara.
- ❖ Kod primene varmetara šeme su identične kao i kod merenja aktivne snage, samo što se umesto vatmetara koriste varmetri.
- ❖ Na slici je prikazana šema za merenje reaktivne snage u četvorožičnom sistemu.



10.5.2.2.1. Merenje reaktivne snage pomoću tri varmetra

❖ Na slici je prikazana šema za merenje reaktivne snage u trožičnom sistemu.



❖ Ove dve šeme su praktično iste samo se u trožičnom sistemu pravi veštačko zvezdište, a u četvorožičnom sistemu naponski kalemovi se vezuju na neutralni (nulti) provodnik.

10.5.2.2.1. Merenje reaktivne snage pomoću tri varmetra

❖ U oba slučaja pokazivanja varmetara su:

$$Q_{\text{var1}} = U_1 I_1 \sin \varphi_1$$

$$\angle(\underline{U}_1, \underline{I}_1) = \varphi_1$$

$$Q_{\text{var2}} = U_2 I_2 \sin \varphi_2$$

$$\angle(\underline{U}_2, \underline{I}_2) = \varphi_2$$

$$Q_{\text{var3}} = U_3 I_3 \sin \varphi_3$$

$$\angle(\underline{U}_3, \underline{I}_3) = \varphi_3$$

❖ Ukupna reaktivna snaga koju mere varmetri je:

$$Q = Q_{\text{var1}} + Q_{\text{var2}} + Q_{\text{var3}}$$

❖ Za uravnoteženi sistem važi da je:

$$Q_{\text{var1}} = Q_{\text{var2}} = Q_{\text{var3}} = Q_{\text{var}}$$

pa je u tom slučaju $Q = 3Q_{\text{var}}$, tako da je u uravnoteženom sistemu moguće meriti reaktivnu snagu samo sa jednim varmetrom.

10.5.2.2.2. Merenje reaktivne snage primenom Aronove sprege

- ❖ U trožičnom sistemu reaktivna snaga se može meriti Aronovom spregom.
- ❖ Šema je ista kao i kod merenja aktivne snage.
- Iz iste šeme dobija se i aktivna i reaktivna snaga.
- ❖ Može se pokazati da se reaktivna snaga može dobiti pomoću realcije:

$$Q = \sqrt{3}(P_{W1} - P_{W2}) \quad (*)$$

- ❖ Ako se ponovo pođe od uravnoteženog sistema dobija se da su pokazivanja vatmetara:

$$P_{W1} = U_l I \cos(\varphi - 30^\circ)$$

$$P_{W2} = U_l I \cos(\varphi + 30^\circ)$$

10.5.2.2.2. Merenje reaktivne snage primenom Aronove sprege

❖ Zamenom poslednja dva izraza u jednačinu (*) dobija se:

$$Q = \sqrt{3}U_l I [\cos(\varphi - 30^\circ) - \cos(\varphi + 30^\circ)]$$

$$Q = \sqrt{3}U_l I (\cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \sin 30^\circ - \cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \sin 30^\circ)$$

$$Q = \sqrt{3}U_l I \cdot 2 \sin \varphi \sin 30^\circ = \sqrt{3}U_l I \cdot 2 \frac{1}{2} \sin \varphi$$

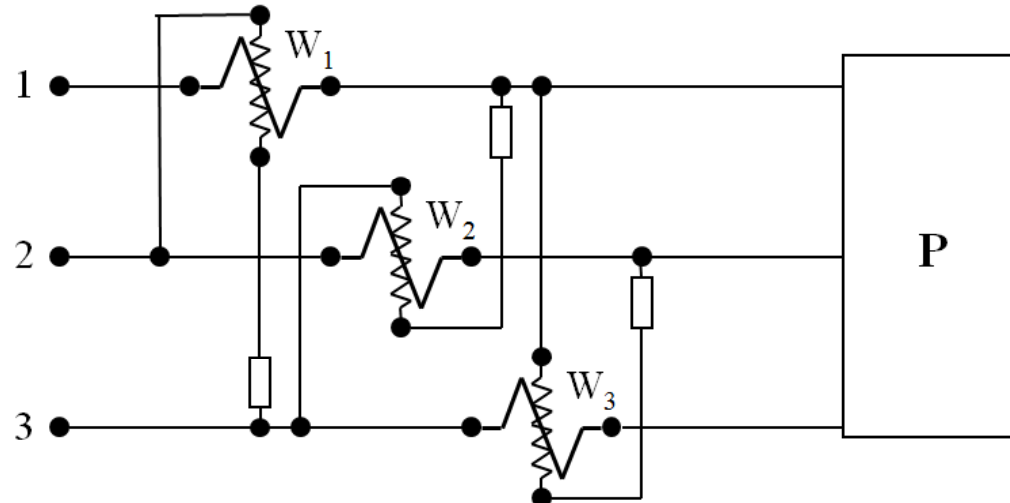
$$Q = \sqrt{3}U_l I \sin \varphi = 3U_f I \sin \varphi$$

❖ Poslednji izraz upravo predstavlja reaktivnu snagu sistema.

❖ Treba naglasiti da Aronovom spregom može da se meri i reaktivna snaga u četvorožičnom sistemu ali samo pod uslovom da je takav sistem uravnotežen.

10.5.2.2.3. Merenje reaktivne snage pomoću tri vatmetra

- ❖ Reaktivna snaga u trožičnim sistemima može da se meri i posebnim vezama vatmetara.
- ❖ Kod ovih veza iskorišćena je osobina trofaznog sistema da je fazni pomeraj između odgovarajućih parova međufaznih i faznih napona jednak 90° .
- ❖ Na slici je data šema za merenje reaktivne snage u trožičnom sistemu upotrebom tri vatmetra.



10.5.2.2.3. Merenje reaktivne snage pomoću tri vatmetra

❖ Pokazivanja vatmetara u ovom slučaju su:

$$P_{W1} = U_{23} I_1 \cos \angle(\underline{U}_{23}, \underline{I}_1)$$

$$P_{W2} = U_{31} I_2 \cos \angle(\underline{U}_{31}, \underline{I}_2)$$

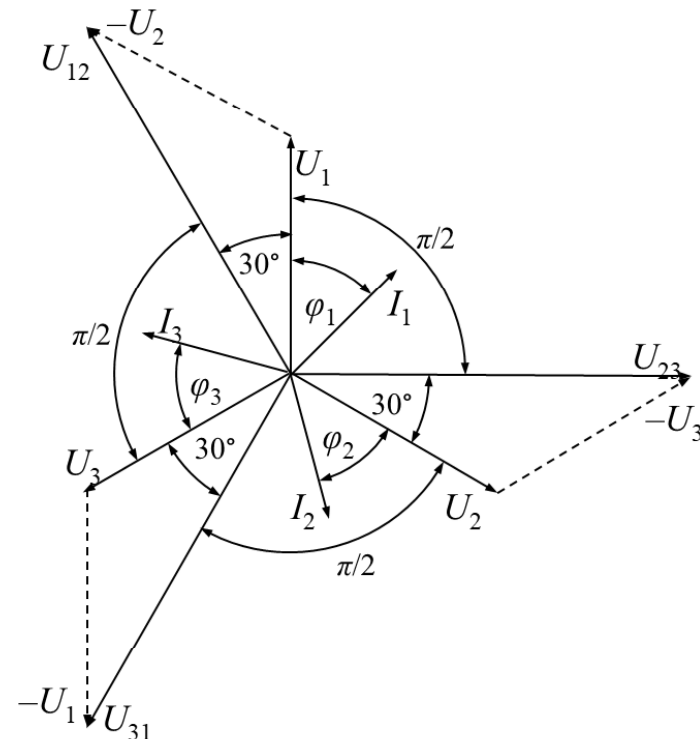
$$P_{W3} = U_{12} I_3 \cos \angle(\underline{U}_{12}, \underline{I}_3)$$

❖ Sa faznog dijagrama može se videti da je:

$$\angle(\underline{U}_{23}, \underline{I}_1) = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$$

$$\angle(\underline{U}_{31}, \underline{I}_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$$

$$\angle(\underline{U}_{12}, \underline{I}_3) = \frac{\pi}{2} - \varphi_3$$



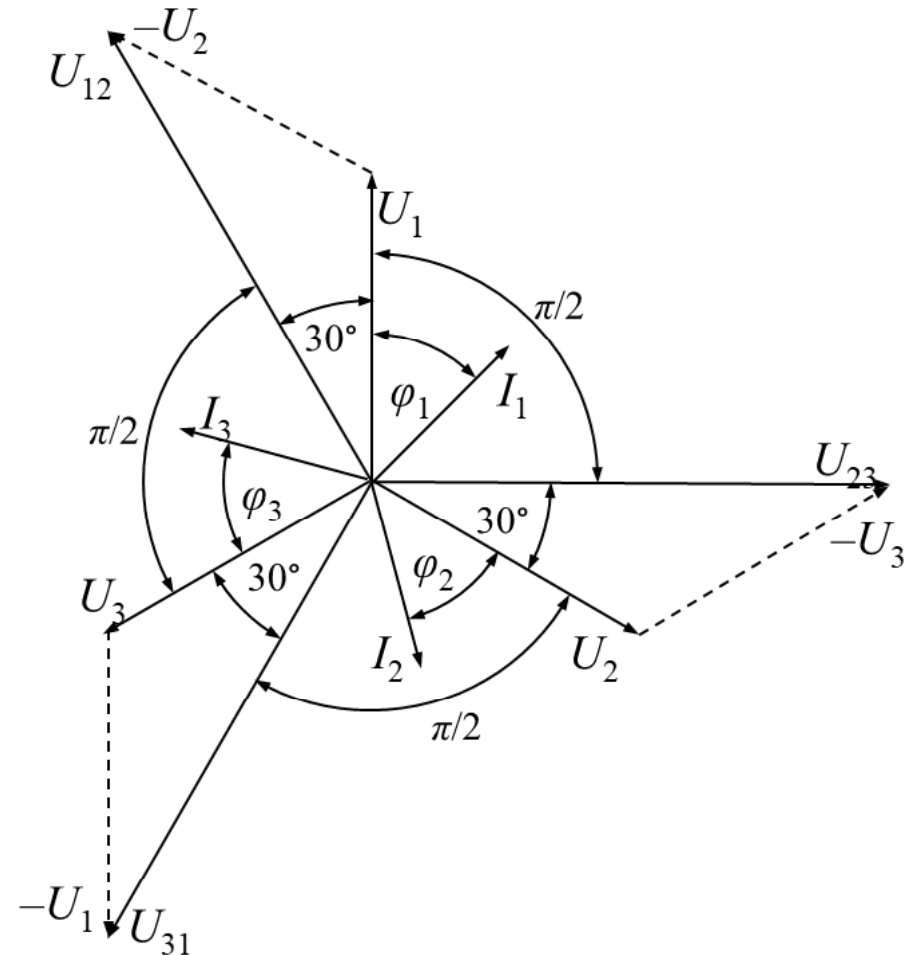
10.5.2.2.3. Merenje reaktivne snage pomoću tri vatmetra

❖ Prema tome dobija se:

$$P_{W1} = U_{23} I_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = U_{23} I_1 \sin \varphi_1$$

$$P_{W2} = U_{31} I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = U_{31} I_2 \sin \varphi_2$$

$$P_{W3} = U_{12} I_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3\right) = U_{12} I_3 \sin \varphi_3$$



❖ Zbir pokazivanja vatmetara je:

$$P_{W1} + P_{W2} + P_{W3} = U_{23} I_1 \sin \varphi_1 + U_{31} I_2 \sin \varphi_2 + U_{12} I_3 \sin \varphi_3$$

10.5.2.2.3. Merenje reaktivne snage pomoću tri vatmetra

❖ Za uravnotežen sistem važi:

$$U_{23} = U_{31} = U_{12} = U_l$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

tako da je:

$$P_{W1} + P_{W2} + P_{W3} = 3U_l I \sin \varphi = \sqrt{3} \sqrt{3} U_l I \sin \varphi = \sqrt{3} Q$$

❖ Tako da se za reaktivnu snagu se dobija:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} (P_{W1} + P_{W2} + P_{W3})$$

10.5.2.2.3. Merenje reaktivne snage pomoću tri vatmetra

❖ Za uravnotežen sistem je:

$$P_{W1} = P_{W2} = P_{W3} = P_W$$

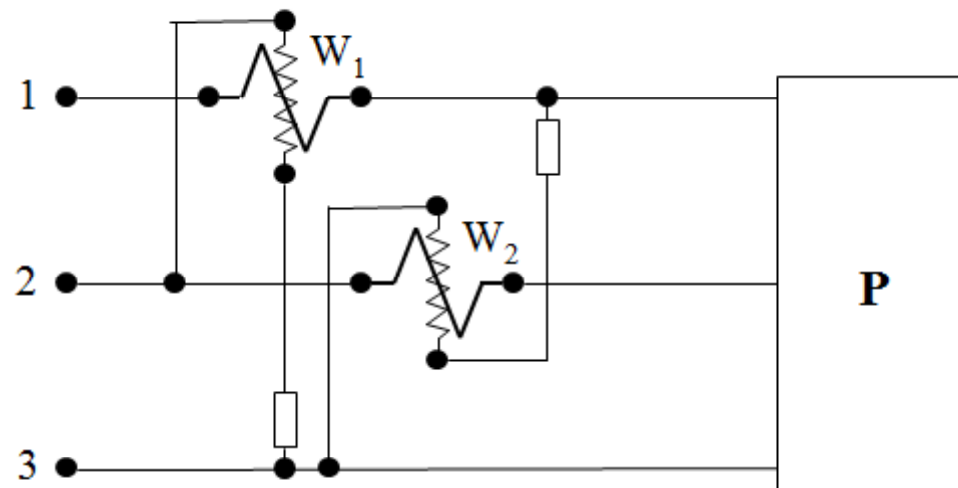
pa se dobija:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} 3P_W = \sqrt{3}P_W$$

❖ Ova metoda za merenje reaktivne snage može da se koristi i u četvorožičnom sistemu pod uslovom da je on uravnotežen.

10.5.2.2.4. Merenje reaktivne snage pomoću dva vatmetra

- ❖ Reaktivna snaga u trožičnom sistemu može da se meri i pomoću dva vatmetra.
- ❖ Potrebno je naglasiti da se ova šema razlikuje od Aronove sprege koja takođe koristi dva vatmetra.



10.5.2.2.4. Merenje reaktivne snage pomoću dva vatmetra

❖ Pokazivanja vatmetara u ovom slučaju su:

$$P_{W1} = U_{23} I_1 \cos \angle(\underline{U}_{23}, \underline{I}_1)$$

$$P_{W2} = U_{31} I_2 \cos \angle(\underline{U}_{31}, \underline{I}_2)$$

❖ Sa faznog dijagrama za Aronovu spregu može se videti da je:

$$\angle(\underline{U}_{23}, \underline{I}_1) = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$$

$$\angle(\underline{U}_{31}, \underline{I}_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$$

tako da se dobija:

$$P_{W1} = U_{23} I_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = U_{23} I_1 \sin \varphi_1$$

$$P_{W2} = U_{31} I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = U_{31} I_2 \sin \varphi_2$$

10.5.2.2.4. Merenje reaktivne snage pomoću dva vatmetra

❖ Zbir pokazivanja vatmetara je:

$$P_{W1} + P_{W2} = U_{23}I_1 \sin \varphi_1 + U_{31}I_2 \sin \varphi_2$$

❖ Za uravnotežen sistem važi:

$$U_{23} = U_{31} = U_l$$

$$I_1 = I_2 = I$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

tako da je:

$$P_{W1} + P_{W2} = 2U_l I \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3} U_l I \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} Q$$

10.5.2.2.4. Merenje reaktivne snage pomoću dva vatmetra

❖ Za vrednost reaktivne snage se dobija:

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2} (P_{W1} + P_{W2})$$

❖ Za uravnotežen sistem je:

$$P_{W1} = P_{W2} = P_W$$

pa se dobija:

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2} 2P_W = \sqrt{3}P_W$$

❖ I ovde je potrebno naglasiti da se ova metoda može primeniti i na četvorožični sistem ali samo pod uslovom da je on uravnotežen.